ผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

The effect of wearing a face mask on a mathematical model of influenza case study in Phuket

พิชชานันท์ กินรี[1*], อนุรักษ์ วีระประเสริฐสกุล[2], เจษฎา สุจริตธุรการ[3] และอนุวัตร จิรวัฒนพาณิช[2]

Pitchanan Kennaree[1*], Anurak Weraprasertsakun[2], Jedsada Sutjaritturakan[3] and Anuwat Jirawattanapanit[2]

[1] นักศึกษาระดับปริญญาตรี, วิทยาศาสตร์บัณฑิต, สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

[1] Undergraduate students,Bachelor of Science, Applied Mathematics, Phuket Rajabhat University.

[2] สาขาคณิตศาสตร์, คณะครุศาสตร์, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

[2] Mathematics, Faculty of Education, Phuket Rajabhat University.

[3] สาขาคณิตศาสตร์ประยุกต์, คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

[3] Applied Mathematics, Faculty of Science and Technology, Phuket Rajabhat University.

[*]**Corresponding author, E-mail:** S6112229108@pkru.ac.th

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาและวิเคราะห์เสถียรภาพผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยใช้วิธีการวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ศึกษาจุดสมดุล ศึกษาเสถียรภาพของจุดสมดุล หาคำตอบเชิงวิเคราะห์ ศึกษาผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์และหาคำตอบเชิงตัวเลข ผลการวิจัยพบว่าตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์พบว่า ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีโรคเป็น Local asymptotically Stable ซึ่งมีค่าระดับการติดเชื้อเท่ากับ $R_0 = \frac{(1-\beta)\alpha N}{\kappa+\omega}$ และผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นปัจจัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันมากจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลง

คำสำคัญ: ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์, ไข้หวัดใหญ่, การสวมหน้ากากอนามัย

Abstract

The purpose of this research was to develop and analyze the stability of the effect of the face mask wearing rate on a mathematical model of influenza. by using standard analytical methods study the equilibrium point study the stability of the equilibrium point. Finding Analytical answers study the effect of self-mask wearing rates in a mathematical model and find numerical answers. The results showed that the mathematical model found that at the disease-free equilibrium and the disease-local asymptotically stable equilibrium, the level of infection was $R_0 = \frac{(1-\beta)\alpha N}{\kappa+\omega}$ and the effect of the mask wearing rate was a factor affecting the mathematical model. If the population at risk of infection wears a protective mask, it will reduce the spread of the disease.

Keywords: mathematical model, influenza, wearing masks

บทนำ

คณิตศาสตร์ได้เข้ามามีบทบาทเกี่ยวข้องในการดำรงชีวิตของมนุษย์ สามารถนำมาประยุกต์ใช้ได้หลากหลายโดยเฉพาะทางการแพทย์สามารถประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์เพื่อจำลองการเกิดโรคและการรักษาโรคต่าง ๆ รวมทั้งเป็นเครื่องมือช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับสุขภาพหลาย ๆ ด้าน อาทิ สภาพแวดล้อมที่ทำให้เกิดโรคต่าง ๆ การป้องกันโรค การทดสอบปริมาณยา เป็นต้น ปัจจุบันการเปลี่ยนแปลงของสภาพภูมิอากาศ สิ่งแวดล้อมเป็นาเหตุทำให้เกิดโรคที่ติดต่อได้ง่ายมีการแพร่ระบาดอย่างรวดเร็วส่งผลต่อสุขภาพทำให้มนุษย์เสียชีวิตได้ง่าย ดังนั้นจำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์มาประยุกต์ใช้แก้ปัญหาช่วยให้มนุษย์มีคุณภาพชีวิตที่ดีขึ้น (อนุวัตร จิรวัฒนพาณิช และคณะ 2562)

จากการศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์แสดงให้เห็นถึงบทบาทและประโยชน์ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยในการแก้วิกฤตการณ์ที่กำลังเกิดขึ้นจากโรคภัยต่าง ๆ โดยจะจำลองประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ตัวเชื้อโรคตัวพาหะนำโรค และผู้ติดเชื้อ โดยแปลงข้อมูลให้อยู่ในรูปสมาการทางคณิตศาสตร์ เพื่ออธิบายลักษณะของการระบาดและการดำเนินของโรคโดยที่ผู้วิจัยไม่จำเป็นต้องไปศึกษากับมนุษย์โดยตรงซึ่งอาจเกิดอันตรายต่อชีวิตของผู้วิจัยและผู้ป่วยได้อีก ทั้งยังช่วยลดงบประมาณสำหรับการเสริมมาตรการการรักษาและการป้องกันโรคตามความต้องการที่แท้จริงได้อย่างรวดเร็วและเหมาะสมมากที่สุดด้วย (ธีรวัฒน์ นาคะบุตร, 2546)

โรคที่เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ (Influenza virus) เป็นการติดเชื้อไวรัสที่ระบบทางเดินหายใจแบบเฉียบพลัน เกิดจากเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ซึ่งมี 3 ชนิด (type) คือ A, B และ C ไวรัสชนิด A เป็นชนิดที่ทำให้เกิดการระบาดอย่างกว้างขวางทั่วโลก ไวรัสชนิด B ทำให้เกิดการระบาดในพื้นที่ระดับภูมิภาค ส่วนชนิด C มักเป็นการติดเชื้อที่แสดงอาการอย่างอ่อนหรือไม่แสดงอาการ และไม่ทำให้เกิดการระบาด โดยมี

ลักษณะอาการที่สำคัญคือ มีไข้สูงแบบทันทีทันใด ปวดศีรษะ ปวดเมื่อยกล้ามเนื้อ อ่อนเพลีย ไข้หวัดใหญ่เป็นโรคที่สำคัญที่สุดโรคหนึ่งในกลุ่มโรคติดเชื้ออุบัติใหม่และโรคติดเชื้ออุบัติซ้ำเนื่องจากเกิดการระบาดของไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ H1N1 เริ่มต้นขึ้นในปี 2009 มีการระบาดในทวีปอเมริกาเหนือ อย่างในประเทศเม็กซิโก และประเทศสหรัฐอเมริกา หลังจากนั้นก็มีการระบาดไปทั่วโลก โดยจะระบาดตามฤดูกาลพบในช่วงฤดูฝนและฤดูหนาว ซึ่งมีการระบาดในประเทศไทยหลังจากปี 2009 เป็นต้นมา พบว่ามีผู้ติดเชื้อไข้หวัดใหญ่ในทุก ๆ ปี (จักรพงษ์ บรูมินเหนทร์, มปป)

โรคไข้หวัดใหญ่สายพันธุ์ H1N1 สามารถพบได้ในทุกเพศทุกวัยโดยติดต่อทางการหายใจ ซึ่งจะได้รับเชื้อที่ออกมาปนเปื้อนอยู่ในอากาศเมื่อผู้ป่วยไอ จาม หรือพูด ในพื้นที่ที่มีคนอยู่รวมกันหนาแน่น เช่น โรงเรียน โรงงาน การแพร่เชื้อจะเกิดได้มาก นอกจากนี้การแพร่เชื้ออาจเกิดโดยการสัมผัสฝอยละอองน้ำมูก น้ำลายของผู้ป่วย จากมือที่สัมผัสกับพื้นผิวที่มีเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ แล้วใช้มือสัมผัสที่จมูกและปาก มีระยะฟักตัวประมาณ 1-3 วัน ในผู้ใหญ่ผู้ป่วยสามารถแพร่เชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่ ตั้งแต่ 1 วันก่อนมีอาการและจะแพร่เชื้อต่อไปอีก 3-5 วันหลังมีอาการ ส่วนในเด็กอาจแพร่เชื้อได้นานกว่า 7 วัน ผู้ที่ได้รับเชื้อไวรัสไข้หวัดใหญ่แต่ไม่มีอาการก็สามารถแพร่เชื้อในช่วงเวลานั้นได้เช่นกันอาการจะเริ่มหลังได้รับเชื้อ 1-4 วัน ผู้ป่วยจะมีไข้แบบทันที พร้อมกับมีอาการปวดศีรษะ หนาวสั่น ปวดเมื่อยกล้ามเนื้ออ่อนเพลียมาก และอาจพบอาการคัดจมูก เจ็บคอถ้าป่วยเป็นระยะเวลานานอาจจะมีอาการไอจากหลอดลมอักเสบอาการจะรุนแรงและป่วยนานกว่าไข้หวัดธรรมดา ผู้ป่วยส่วนใหญ่จะหายเป็นปกติภายใน 1-2 สัปดาห์ แต่มีบางรายที่มีอาการรุนแรง เนื่องจากมีภาวะแทรกซ้อนที่สำคัญคือ ปอดบวม ซึ่งอาจทำให้เสียชีวิตได้ ผู้ที่เสี่ยงสูงต่อการเกิดภาวะแทรกซ้อนหรือเสียชีวิต ได้แก่ ผู้ที่อายุ 65 ปีขึ้นไป เด็กที่อายุต่ำกว่า 2 ปี ผู้ป่วยโรคเรื้อรัง เช่น โรคปอด โรคหัวใจโรคไต เบาหวาน ภูมิคุ้มกันบกพร่อง เด็กที่ได้รับการรักษาด้วยยาแอสไพรินเป็นเวลานาน และหญิงตั้งครรภ์ (จักรพงษ์บรูมินเหนทร์, มปป)

ในปี 2015 มนัสนันท์ ลิมปวิทยากุล และชมพูนุช โมรา ได้ศึกษาสภาพปัจจุบัน ปัญหาอุปสรรคเงื่อนไขและปัจจัยแห่งความสำเร็จของรูปแบบการเฝ้าระวังโรคไข้หวัดใหญ่ของ โรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพตำบลในพื้นที่ชายแดนไทย-สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว (สปป.ลาว) จังหวัดอุบลราชธานี โดยใช้กระบวนการวิจัยเชิงสำรวจเก็บรวบรวมข้อมูลด้วยแบบสอบถามและแบบสัมภาษณ์ที่นักวิจัยพัฒนาขึ้นจากบุคลากรสาธารณสุขกลุ่มผู้นำชุมชนองค์การบริหารส่วนตำบล กำนัน ผู้ใหญ่บ้าน อาสาสมัครสาธารณสุข และกลุ่มบุคลากรที่ปฏิบัติงานในหน่วยบริการสุขภาพ ประเทศ สปป.ลาว กลุ่มบุคลากรสาธารณสุขที่ปฏิบัติงานในโรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพ ตำบลมีความพร้อมรับการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ในทุกด้าน ทั้งด้านนโยบายและการบริหารจัดการ ด้านเฝ้าระวังป้องกันโรค ด้านเวชภัณฑ์ วัสดุอุปกรณ์ และด้านการควบคุมการระบาดฉุกเฉิน ปัญหาอุปสรรคที่พบคือคนไข้ไม่มาพบแพทย์ในระยะแรก ไม่เห็นความสำคัญควบคุมยากโดยเฉพาะผู้ป่วยจากสปป.ลาว ส่วนพฤติกรรมการเฝ้าระวังและการป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ของบุคลากรนั้น โดยภาพรวมมีการปฏิบัติอยู่ในระดับมาก (มนัสนันท์ ลิมปวิทยากุล และชมพูนุชโมรา, 2558)

จากเหตุข้างต้นผู้วิจัยได้ตระหนักและเห็นประโยชน์ที่ได้รับจึงดำเนินการวิจัย เรื่องผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ เพื่อนำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรค ลดจำนวนผู้ป่วย

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

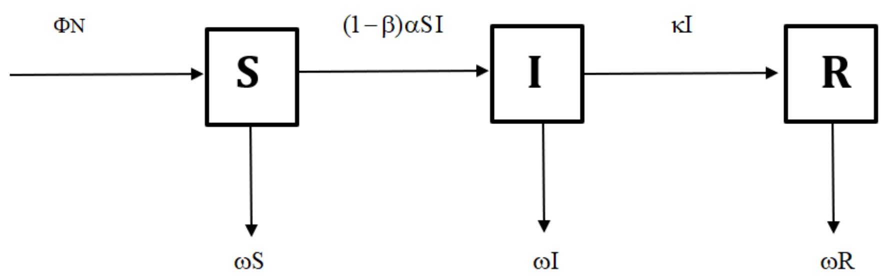
1. เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของการสวมหน้ากากอนามัยสำหรับป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

2. เพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ กรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต

วิธีดำเนินการวิจัย

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับไข้หวัดใหญ่ที่สอดคล้องกับกลุ่มประชากรและลักษณะของการเกิดโรค ซึ่งมีวิธีการดำเนินการวิจัย 5 ขั้นตอนดังนี้

1. การพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยได้ศึกษาแผนภาพแสดงความสัมพันธ์ขององค์ประกอบในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ และได้พัฒนาตัวแบบสำหรับการสวมหน้ากากอนามัยที่มีผลต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ ดังรูปที่1



รูปที่ 1 ความสัมพันธ์และองค์ประกอบของการศึกษาผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่

โดยที่ N แทนจำนวนประชากรทั้งหมด, S แทนจำนวนคนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ, I แทนจำนวนคนที่ติดเชื้อ, R แทนจำนวนคนที่หายป่วยจากโรค, Φ แทนอัตราการเกิดของประชากร, β แทนอัตราการสวมหน้ากาก, α แทนอัตราการสัมผัสเชื้อ, κ แทนอัตราการหายป่วย และ ω แทนอัตราการตาย ซึ่งในการศึกษาครั้งนี้ได้กำหนดให้จำนวนประชากรมนุษย์คงที่

จากรูปที่ 1 ผู้วิจัยได้ดำเนินการส่งผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้องผู้ทรงคุณวุฒิทางคณิตศาสตร์ ได้แก่ รศ.ดร.บัณฑิต อันยงค์ ผู้เชี่ยวชาญทางด้านคณิตศาสตร์ และอนุวัตร จิรวัฒนพาณิช ช่วยตรวจสอบแผนภาพและระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้นเมื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบและให้ข้อเสนอแนะ ผู้วิจัยได้ทำการแก้ไขปรับปรุงตามคำแนะนำแล้วนำตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ได้มาวิเคราะห์ตามวิธีมาตรฐาน ซึ่งจากรูปที่ 1 ได้ระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ดังนี้

$$\frac{dS}{dt} = \Phi N - (1-\beta)\alpha SI - \omega S \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\beta)\alpha SI - \kappa I - \omega I \qquad (2)$$

$$\frac{dR}{dt} = \kappa I - \omega R \qquad (3)$$

โดยที่ $N = S + I + R$ จากสามการ (1)-(3) จะได้เซตของตัวแปร S, I, R เพื่อช่วยในการหาจุดสมดุล (Equilibrium point)

2. การหาจุดสมดุล หาได้จากสมการที่ (1)-(3) ของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ โดยที่ $N = S + I + R$ เมื่อกำหนดให้จำนวนประชากรทั้งหมดเป็นค่าคงที่ นั้นคือ

$\frac{dN}{dt} = 0$ จะได้ $\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt}$ เมื่อกำหนด $\frac{dN}{dt} = 0, \frac{dS}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ จากสมการ (1)-(3)

จะได้

$$S = \frac{\Phi N}{(1-\beta)\alpha I + \omega} \qquad (4)$$

$$I = \frac{\Phi N}{\kappa + \omega} - \frac{\omega}{(1-\beta)\alpha} \qquad (5)$$

$$R = \frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\Phi N}{\kappa + \omega} - \frac{\omega}{(1-\beta)\alpha}\right) \qquad (6)$$

จะได้ความเสถียรภาพของจุดสมดุลสามารถพิจารณาจากค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์จากสมาการอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น จาก(1)-(3) สามารถดำเนินการเปลี่ยนแปลงเป็นจาโคเบียนเมทริกซ์จากความสัมพันธ์ $\frac{dN}{dt} = F(x)$ โดยที่ $J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right]$ เมื่อกำหนด $X = (S, I, R)$ และพิจารณาค่าเฉพาะที่ได้จาก $\det(J - \lambda I_3) = 0$ เมื่อ I_3 คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3x3 ได้ดังนี้

$$J=\begin{bmatrix}(1-\beta)\alpha I-\omega & -(1-\beta)\alpha S & 0\\ (1-\beta)\alpha I & (1-\beta)\alpha S-\kappa-\omega & 0\\ 0 & \kappa & -\omega\end{bmatrix}$$

3. จุดสมดุลที่ไม่มีโรค (E_0) กำหนดให้ I = 0 ในสมาการที่ (5) และแทน R = 0 ในสมาการที่ (6) จะได้ S = N ดังนั้น $E_0(S,I,R)$ = $E_0(N,0,0)$ เสถียรของระบบ (Stability of Systems) ที่จุด E_0 โดยจะดำเนินการหาสมาการลักษณะเฉพาะ $\det(J-\lambda I_3)=0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3x3 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงต้องเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไข Roth-Hurwitz) จึงส่งผลให้ค่า $R_0 < 1$ ดังนี้

$$J_0=\begin{bmatrix}-\omega & -(1-\beta)\alpha N & 0\\ 0 & (1-\beta)\alpha N-\kappa-\omega & 0\\ 0 & \kappa & -\omega\end{bmatrix} \quad , \quad J_0-\lambda I_3=\begin{bmatrix}-\omega-\lambda & -(1-\beta)\alpha N & 0\\ 0 & (1-\beta)\alpha N-\kappa-\omega & 0\\ 0 & \lambda & -\omega-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\det(J_0-\lambda I_3)=(-\omega-\lambda)\begin{vmatrix}-\omega-\lambda & -(1-\beta)\alpha N\\ 0 & (1-\beta)\alpha N-\kappa-\omega\end{vmatrix}=0$$

$$0=(-\omega-\lambda)\left[(-\omega-\lambda)((-\beta)\alpha N-\kappa-\omega)-0\right]$$

$$0=(-\omega-\lambda)(-\omega-\lambda)((-\beta)\alpha N-\kappa-\omega)$$

จะได้ $(-\omega-\lambda)=0$ หรือ $(-\omega-\lambda)=0$ หรือ $((1-\beta)\alpha N-\kappa-\omega)=0$ จะได้ค่าสมการลักษณะเฉพาะดังนี้ $\lambda_1=-\omega,\lambda_2=-\omega$ และ $\lambda_3=(1-\beta)\alpha N-\kappa-\omega$
ดังนั้น $(1-\beta)\alpha N-\kappa-\omega<0$

4. จุดสมดุลที่มีโรค (E_1) กำหนด $I\neq 0$ และ $I>0$ พิจารณา $E_1(S,I,R)$ ซึ่งจะหาได้จากสมาการที่ (4)-(6) จะได้ดังนี้

$$E_1(S,I,R)=\left(\frac{\Phi N}{(1-\beta)\alpha I+\omega},\frac{\Phi N}{\kappa+\omega}-\frac{\omega}{(1-\beta)\alpha},\frac{\kappa}{\omega}\left(\frac{\Phi N}{\kappa+\omega}-\frac{\omega}{(1-\beta)\alpha}\right)\right)$$

ดังนั้น สมการลักษณะที่จุด $E_1(S,I,R)$ โดยให้ $\det(J_1 - \lambda I) = 0$ เพื่อหาค่า λ เมื่อ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะ (Eigen Values) และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3x3 กำหนด $I \neq 0$ และ $I > 0$ พิจารณา จุดสมดุลที่มีโรคโดยการตรวจสอบค่าลักษณะเฉพาะของจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ สภาวะที่มีการแพร่เชื้อของโรค $E_1(S,I,R)$ ซึ่งได้จากสมการลักษณะเฉพาะจาก $\det(J_1 - \lambda I) = 0$, J_1 คือจาโคเบียนเมทริกซ์ ณ จุด E_1 โดยมีข้อกำหนดว่า λ ทุกค่าส่วนจริงต้องเป็นลบซึ่งจะสอดคล้องตามเงื่อนไข Roth-Hurwitz จึงส่งผลให้ค่า $R_0 > 1$

$$J_1 = \begin{bmatrix} (1-\beta)\alpha I^* - \omega & -(1-\beta)\alpha N & 0 \\ (1-\beta)\alpha I^* & (1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega & 0 \\ 0 & \kappa & -\omega \end{bmatrix}$$

$$J_1 - \lambda I_3 = \begin{bmatrix} (1-\beta)\alpha I^* - \omega - \lambda & -(1-\beta)\alpha N & 0 \\ (1-\beta)\alpha I^* & (1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega - \lambda & 0 \\ 0 & \kappa & -\omega - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\det(J_1 - \lambda I_3) = (-\omega - \lambda)\begin{vmatrix} (1-\beta)\alpha I^* - \omega - \lambda & -(1-\beta)\alpha N \\ -(1-\beta)\alpha I^* & (1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$0 = (-\omega - \lambda)\left[((1-\beta)\alpha I^* - \omega - \lambda)((1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega - \lambda) - ((1-\beta)\alpha I^*) - (1-\beta)\alpha N\right]$$

$$0 = (-\omega - \lambda)\left[((1-\beta)\alpha I^* - \omega)((1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega) - \lambda((1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega) + ((1-\beta)\alpha I^* - \omega)(-\lambda)(\lambda^2)\right]$$

$$0 = (-\omega - \lambda)\left[(-\lambda)(\lambda^2)\underbrace{(1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega + (1-\beta)\alpha I^* - \omega}_{A} + \underbrace{((1-\beta)\alpha I^* - \omega)((1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega)}_{B}\right]$$

จะได้ $0 = (-\omega - \lambda)$

$$\lambda_1 = -\omega$$

$$0 = \lambda^2 - A\lambda + B$$

โดยที่ $A = (1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega + (1-\beta)\alpha I^* - \omega$

$$B = ((1-\beta)\alpha I^* - \omega)((1-\beta)\alpha N - \kappa - \omega)$$

$$\lambda_2 = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}$$

ซึ่ง $\dfrac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4B}}{2} < 0$

5. การหาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0)

การหาค่าระดับการติดเชื้อหาค่า Spectral Radius ของ FV^{-1} โดยใช้ Next Generation Method ซึ่งได้จากสมการ (1) - (3) จะได้เมทริกซ์ในรูป $\frac{dX}{dt} = F(X) - V(X)$ เพื่อหาค่า Spectral Radius FV^{-1} ซึ่ง F(x) และ V(x) ได้จากอนุพันธ์ย่อย (Partial Derivative)

$$X = \begin{bmatrix} S \\ I \\ R \end{bmatrix}, \quad F = \left[\frac{\partial F_i(E_0)}{\partial X_i}\right] \text{ และ } \quad V = \left[\frac{\partial V_i(E_0)}{\partial X_i}\right]$$

เมื่อ F(x) คือเมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เพิ่มขึ้น และ V(x) คือ เมทริกซ์ของผู้ป่วยที่เปลี่ยนสถานะจากกลุ่มหนึ่งไปอีกกลุ่มหนึ่งโดยพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ R_0 ดังนี้

$$F(x)\begin{bmatrix} 0 \\ (1-\beta) \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \qquad V(X) = \begin{bmatrix} -\Phi N+(1-\beta)\alpha SI+\omega S \\ \kappa I+\omega I \\ -\kappa I+\omega R \end{bmatrix}$$

จะได้

$$F(E) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (1-\beta)\alpha I & (1-\beta)\alpha S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad V(E) = \begin{bmatrix} (1-\beta)\alpha I+\omega & (1-\beta)\alpha S & 0 \\ 0 & \kappa+\omega & 0 \\ 0 & -\kappa & \omega \end{bmatrix}$$

ให้ $$E_0(S, I, R) = (N, 0, 0)$$

จะได้ $$F(E_0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta)\alpha N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V(E_0) = \begin{bmatrix} \omega & (1-\beta)\alpha N & 0 \\ 0 & \kappa+\omega & 0 \\ 0 & -\kappa & \omega \end{bmatrix}$$

$$M(V(E_0)) = \begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} \kappa+\omega & 0 \\ -\kappa & \omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \kappa+\omega \\ 0 & -\kappa \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (1-\beta)\alpha N & 0 \\ -\kappa & \omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \omega & (1-\beta)\alpha N \\ 0 & -\kappa \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} (1-\beta)\alpha N & 0 \\ \kappa+\omega & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \omega & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \omega & (1-\beta)\alpha N \\ 0 & \kappa+\omega \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

$$M = \begin{vmatrix} (\kappa+\omega)\omega & 0 & 0 \\ (1-\beta)\alpha N\omega & \omega^2 & -\kappa\omega \\ 0 & 0 & (\kappa+\omega)\omega \end{vmatrix}$$

$$C = \begin{vmatrix} (\kappa+\omega)\omega & 0 & 0 \\ -(1-\beta)\alpha N\omega & \omega^2 & -\kappa\omega \\ 0 & 0 & (\kappa+\omega)\omega \end{vmatrix}$$

$$\det V = \omega \begin{vmatrix} \kappa+\omega & 0 \\ -\kappa & \omega \end{vmatrix} = \omega(\kappa+\omega)\omega = \omega^2(\kappa+\omega)$$

$$V^{-1}(E_0) = \begin{vmatrix} (\kappa+\omega)\omega & -(1-\beta)\alpha N\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & -\kappa\omega & (\kappa+\omega)\omega \end{vmatrix} \bullet \frac{1}{\omega^2(\kappa+\omega)}$$

พิจารณา $\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right]$

$$\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta)\alpha N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\kappa+\omega)\omega & -(1-\beta)\alpha N\omega & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & -\kappa\omega & (\kappa+\omega)\omega \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{\omega^2(\kappa+\omega)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\beta)\alpha N\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \frac{1}{\omega^2(\kappa+\omega)}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{(1-\beta)\alpha N\omega^2}{\omega^2(\kappa+\omega)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right] = \frac{(1-\beta)\alpha N}{(\kappa+\omega)}$$

ดังนั้น คำนวณหาค่า Spectral Radius ของ $FV^{-1}(E_0)$ เขียนแทนค่าด้วย

$$\rho\left[FV^{-1}(E_0)\right] = \frac{(1-\beta)\alpha N}{(\kappa+\omega)}$$

จะได้ $R_0 = \dfrac{(1-\beta)\alpha N}{(\kappa+\omega)}$

ดังนั้นจุดสมดุลที่มีโรคมีเสถียรภาพ เมื่อ $R_0 > 1$ โดย $R_0 = \dfrac{(1-\beta)\alpha N}{(\kappa+\omega)}$

โดยพิจารณา ดังนี้

1. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 < 1$ จะไม่เกิดการแพร่ระบาด และ
2. ค่า R_0 ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคมีค่า $R_0 > 1$ จะเกิดการแพร่ระบาด

ผลการวิจัย

การวิเคราะห์เชิงตัวเลข

การวิจัยในครั้งนี้ผู้วิจัยได้ทำการวิเคราะห์เชิงตัวเลขโดยการนำค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ ซึ่งมีค่าต่าง ๆ ดังนี้

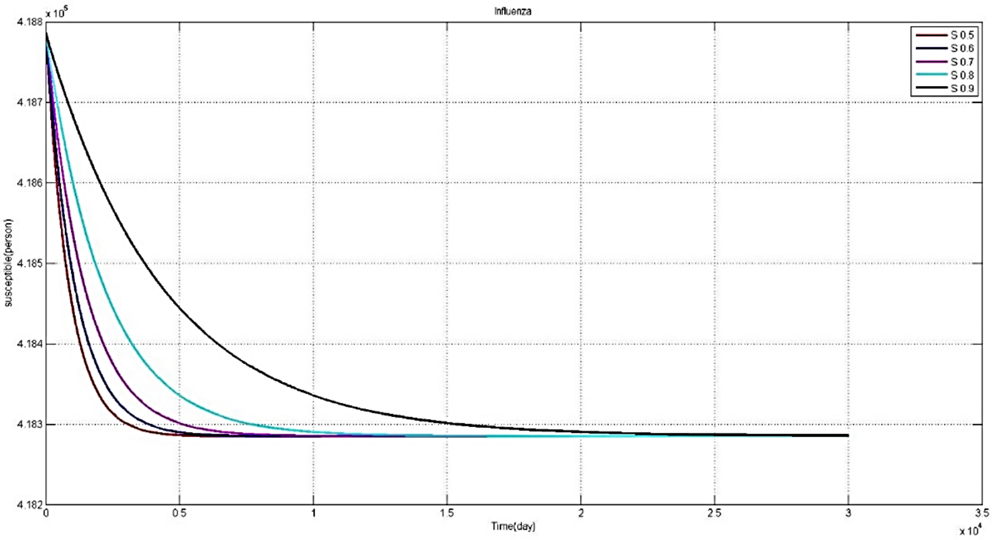
ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ที่ได้จากการสำรวจข้อมูลเกี่ยวกับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่

ข้อความ	สัญลักษณ์	ค่าพารามิเตอร์	หน่วย
จำนวนประชากรของมนุษย์ทั้งหมด	N	418,785	คน
อัตราการเกิด	Φ	0.00003145	ต่อวัน
อัตราการตายโดยธรรมชาติ	ω	0.00001694	ต่อวัน
อัตราการสัมผัสเชื้อ	α	0.00548	ต่อวัน
อัตราการหาย	κ	0.0329	ต่อวัน
อัตราการสวมหน้ากากอนามัย	β	0.5-0.9	

*สำนักงานสาธารณสุขจังหวัดภูเก็ต

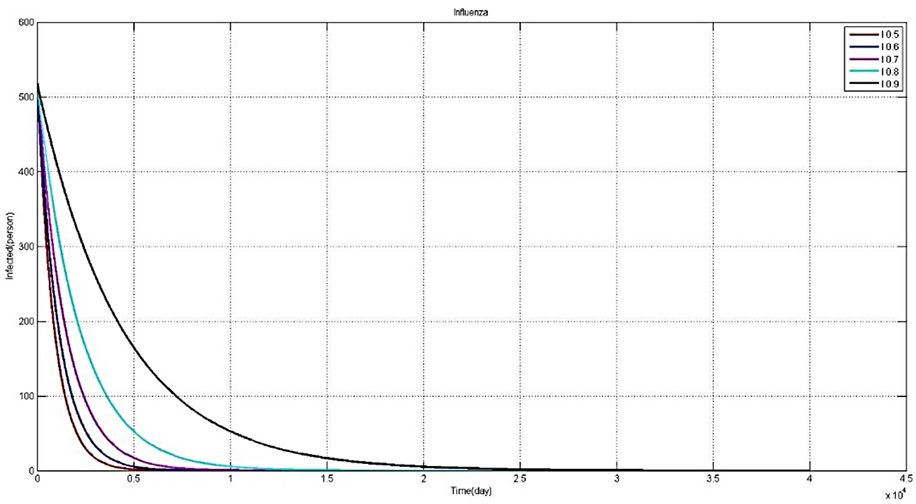
เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบ และสอดคล้องกับเงื่องไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_0 = (N,0,0)$ ดังนั้นจุดสมดุลไม่มีโรค E_0 จะเป็น Local Asymptotically (Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu (Eds.) 2008)

เมื่อพิจารณาเสถียรภาพของระบบ ณ จุดสมดุลที่มีโรค จะพบว่าค่าลักษณะเฉพพาะทุกค่ามีส่วนจริงเป็นค่าลบและสอดคล้องกับเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz ส่งผลให้คำตอบจะลู่เข้าสู่ $E_1 = \left(S^*, I^*, R^*\right)$ ดังนั้นจุดสมดุลมีโรค E_1 จะเป็น Local Asymptotically



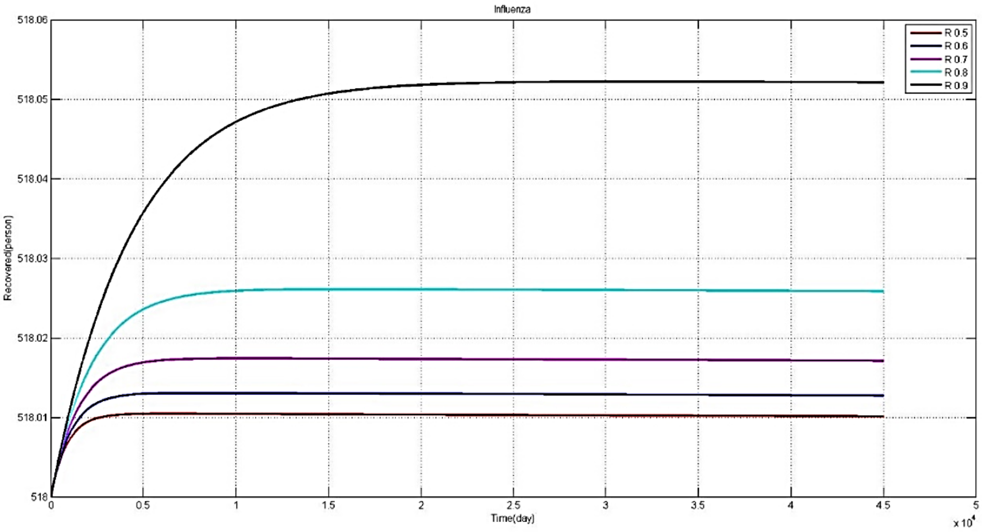
รูปที่ 2 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง(S) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\beta = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อ

จากรูปที่ 2 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องโรคไข้หวัดใหญ่ (β) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวัดใหญ่ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยง(S) ณ เวลา t ใด ๆ จะค่อย ๆ ลดลงและเปลี่ยนแปลงอย่างช้า ๆ ซึ่งถ้าประชากรมีการสวมหน้ากากอนามัยเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงลดลงอย่างช้า ๆ ซึ่งหมายถึงอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มติดเชื้อจะใช้เวลานานขึ้นจนการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ลดลง



รูปที่ 3 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อ(I)ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า$\beta = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อโรค

จากรูปที่ 3 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ (β) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ให้มากขึ้นจะพบว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรกลุ่มเสี่ยงติดเชื้อ (I) ณ เวลา t ใด ๆ ลดลงอย่างเห็นได้ชัดและยังพบว่าถ้าประชากรสวมหน้ากากอนามัยเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้จุดกลุ่มติดเชื้อลดลงและการแพร่ระบาดของโรคจะลดลง



รูปที่ 4 อัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่หายป่วยจากโรค (R) ณ เวลา t ใด ๆ เมื่อค่า $\beta = 0.5 - 0.9$ ตามลำดับ ณ เสถียรภาพของจุดสมดุลมีเชื้อโรค

จากรูปที่ 4 เมื่อเพิ่มอัตราการสวมหน้ากากอนามัยป้องโรคไข้หวัดใหญ่ (β) ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ จะส่งผลให้จำนวนประชากรกลุ่มติดเชื้อเปลี่ยนไปเป็นกลุ่มที่หายป่วยจากโรครวดเร็วขึ้น เนื่องจากจำนวนคนเชื้อน้องลงจึงส่งผลให้เกิดการแพร่ระบาดลดลง

จากการศึกษาพบว่าผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งต่อตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์การแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันน้อยจะส่งผลให้การพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้นและถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อมีการสวมหน้ากากอนามัยป้องกันเป็นจำนวนมากขึ้นจะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อ

สรุปและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยกรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ตและเพื่อวิเคราะห์เสถียรภาพของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับผลของอัตราการสวมหน้ากากอนามัยกรณีศึกษาจังหวัดภูเก็ต ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิจัยในครั้งนี้ คือระบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบไม่เชิงเส้น ซึ่งประกอบด้วย ประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ ประชากรที่ติดเชื้อและสามารถแพร่เชื้อได้และประชากรที่หายป่วยจากโรค ซึ่งผู้วิจัยเพิ่มค่าพารามิเตอร์ (β) คือ อัตราการให้ความรู้ ลงในตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ใช้วิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน และวิเคราะห์เชิงตัวเลขสำหรับตรวจสอบการแพร่ระบาดของโรค

ผู้วิจัยได้พิจารณาจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่เกิดการแพร่ระบาดของโรค โดยการวิเคราะห์จุดสมดุลและเสถียรภาพของจุดสมดุลด้วยวิธีการวิเคราะห์วิธีมาตรฐาน ซึ่งค่าเสถียรภาพของระบบ Local Asymptotical Stable ที่ได้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขของ Routh-Hurwitz เพื่อให้สามารถหาค่าพารามิเตอร์ (R_0) ซึ่งมีความจำเป็นภายใต้เงื่อนไขเพื่อให้ Local Asymptotically Stability of Equilibrium State ที่มีเสถียรภาพในส่วนของจุดสมดุลที่ไม่มีโรคและจุดสมดุลที่มีการแพร่ระบาดของโรคโดยที่

$R_0 = \dfrac{(1-\beta)\alpha N}{\kappa+\omega}$ สามารถพิจารณาค่าระดับการติดเชื้อ (R_0) โดยค่า $R_0 < 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลจะไม่มีโรคจึงไม่เกิดการแพร่ระบาดโรคของโรค และค่า $R_0 > 1$ วิเคราะห์ได้ว่า ณ จุดสมดุลมีการติดเชื้อจึงเกิดการแพร่ระบาดของโรค จากการวิเคราะห์เชิงตัวเลขพบว่าจุดสมดุลทั้งสองเป็น Local Asymptotical Stable ณ จุดสมดุลที่ไม่มีโรคเมื่อ $(\beta) = 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$

จากการวิจัยพบว่าการสวมหน้ากากอนามัยเป็นผลปัจจัยหนึ่งที่ส่งผลต่อการเปลี่ยนแปลงของตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ SIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคไข้หวัดใหญ่ โดยพบว่าถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่ที่ไม่สวมหน้ากากอนามัย จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคเพิ่มขึ้น และถ้าประชากรที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่สวมหน้ากากอนามัยจำนวนมาก จะส่งผลให้การแพร่ระบาดของโรคลดลงจนกระทั่งไม่มีการแพร่ระบาดของเชื้อโรคไข้หวัดใหญ่

ดังนั้นสามารถนำผลวิจัยตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการให้ความรู้สำหรับการป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่ นำไปใช้เป็นข้อมูลเบื้องต้นในการป้องกันโรคเพื่อลดจำนวนผู้ป่วยและใช้เป็นข้อมูลวิชาการให้กับหน่วยงานที่เฝ้าระวังของสำนักระบาดวิทยา กรมควบคุมโรค กระทรวงสาธารณสุข รวมทั้งนำเสนอต่อหน่วยงานด้านสาธารณสุขดำเนินการหามาตรการควบคุมและป้องกันโรคไข้หวัดใหญ่โดยการสวมหน้ากากให้กับประชาชนที่เสี่ยงต่อการติดเชื้อ

เอกสารอ้างอิง

กรมควบคุมโรค. (2561). ไข้หวัดใหญ่ (Influenza). ค้นเมื่อ 19 มีนาคม 2565,จาก. www.boe.moph.go.th/fact/Influenza.htm

กองโรคติดต่อทั่วไป. (2563). *สถานการณ์โรคไข้หวัดใหญ่.* ค้นเมื่อ 19 มีนาคม 2565, จาก https://ddc.moph.go.th/uploads/files/1426620200814091118.pdf

จักรพงษ์ บรูมินเหนทร์. (มปป). *ไข้หวัดใหญ่ H1N1 ระบาด ถึงตายถ้าไม่ป้องกัน.* ค้นเมื่อ 19 มีนาคม 2565, จากhttps://med.mahidol.ac.th

ธีรวัฒน์ นาคะบุตร. (2546). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ . นครปฐม* : ราชภัฏนครปฐม

มนัสนันท์ ลิมปวิทยากุล และชมพูนุช โมรา. (2558). *การเฝ้าระวังโรคไข้หวด์ใหญ่ของโรงพยาบาลส่งเสริมสุขภาพ ตำบลในพื้นที่ชายแดนไทย-สาธารณรัฐประชาธิปไตยประชาชนลาว.* อุบลราชธานี : มหาวิทยาลัยราช ภัฏอุบลราชธานี

มาลี ศรีพรหม และคณะ. (2559). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ของโรคไข้หวด์ใหญ่ โดยพิจารณาผลกระทบจากปริมาณน้ำฝน.* สกลนคร : มหาวิทยาลัยราชภัฏสกลนคร

อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ.(2562*). ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์สำหรับการรณรงค์ป้องกันการแพร่ระบาดของโรคตาแดง(รายงานการวิจัย) . ภูเก็ต* : มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

อนุวัตร จิรวัฒนาพาณิชและคณะ. (2560). *ตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์SEIR สำหรับการควบคุมการแพร่ระบาดของโรคอิสุกอิใสโดยการรณรงค์ให้ความรู้ (รายงานการวิจัย).* ภูเก็ต : มหาวิทยาลัยราชภัฏภูเก็ต

เอกพงษ์ บุญเซ็น. (2554). *แบบจำลอง SIR สำหรับการย้ายถิ่นของประชากรหนึ่งกลุ่ม (รายงานการวิจัย). กรุงเทพมหานคร* : มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์

Jantaporn Sukawat, and Surapol Naowarat. (2014). *Effect of Rainfall on the transmission model of Conjunctivitis*. Advancen in Environmental Biology 8-14

Kermack and McKendrick. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *The Royal Society of London*,115,700-721.

Conjunctivitis. Advanced in Environmental, *Biology*, 8(14): 99-104.

Fred Brauer, Pauline den Driessche and Jianhong Wu. (2008). *Mathematical Epidemiology.*